한양대학교 2018학년도 신입학전형 수시		
자 연 계	**논 술 예 시 답 안**	오전-2번

1.

$$f'(x)=(x-3)\cdots(x-2017)+(x-1)(x-5)\cdots(x-2017)$$
$$+(x-1)(x-3)(x-7)\cdots(x-2017)+\cdots+(x-1)(x-3)\cdots(x-2015)$$

이고,

$$f'(2)=(2-3)(2-5)\cdots(2-2017)+(2-1)(2-5)\cdots(2-2017)$$
$$+(2-1)(2-3)(2-7)\cdots(2-2017)$$
$$+\cdots+(2-1)(2-3)\cdots(2-2015)$$

이다. 한편 우변의 첫 두항의 합은

$$(2-3)(2-5)\cdots(2-2017)+(2-1)(2-5)\cdots(2-2017)$$
$$=(-1)(2-5)\cdots(2-2017)+(1)(2-5)\cdots(2-2017)=0$$

이므로

$$f'(2)=(2-1)(2-3)(2-7)\cdots(2-2017)+\cdots+(2-1)(2-3)\cdots(2-2015)$$

한편 우변의 각항은 음수 1007개의 곱이므로 역시 음수이고, $f'(2)<0$이다.

2. 우선 임의의 $a=1,3,\dots,2017$에 대하여 $f(a)=0$이고 $f'(a)\neq 0$이므로

$$f''(a)f(a)<(f'(a))^2.$$

만약 x가 1,3, ... ,2017이 아닌 실수라면 $f(x)\neq 0$이므로

$$\frac{f(x)f''(x)-f'(x)^2}{f(x)^2}<0 \quad \text{-------}(*)$$

임을 보이면 된다. 한편

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\cdots+\frac{1}{x-2017}$$

이고

$$\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)-f'(x)^2}{f(x)^2}=-\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\cdots+\frac{1}{(x-2017)^2}\right)<0.$$

3. 우선

$$-1=g(\alpha)^3-1=p_1(\alpha)\cdots p_n(\alpha) \quad \text{------}(*)$$

이고 $p_i(\alpha)\,(i=1,\dots,n)$는 정수이므로 $p_i(\alpha)=\pm 1$이고

$$h(\alpha)=p_1(\alpha)^2+\cdots+p_n(\alpha)^2-n=0.$$

한편

$$3g(x)^2g'(x)=p_1{}'(x)p_2(x)\cdots p_n(x)+\cdots+p_1(x)\cdots p_{n-1}(x)p_n{}'(x)$$

이므로

$$0=p_1{}'(\alpha)p_2(\alpha)\cdots p_n(\alpha)+\cdots+p_1(\alpha)\cdots p_{n-1}(\alpha)p_n{}'(\alpha)$$
$$=-\left(\frac{p_1{}'(\alpha)}{p_1(\alpha)}+\cdots+\frac{p_n{}'(\alpha)}{p_n(\alpha)}\right) \quad \text{---------------}(*\text{ 적용})$$
$$=-(p_1{}'(\alpha)p_1(\alpha)+\cdots+p_n{}'(\alpha)p_n(\alpha)) \quad \text{------------}\left(p_i(\alpha)=\pm 1=\frac{1}{p_i(\alpha)}\right)$$

이고 $h'(x)=2(p_1(x)p_1{}'(x)+\cdots+p_n(x)p_n{}'(x))$이므로 $h'(\alpha)=0$.