나형 정답

1	③	2	②	3	④	4	③	5	④
6	②	7	②	8	⑤	9	④	10	①
11	⑤	12	④	13	①	14	③	15	⑤
16	③	17	②	18	③	19	①	20	⑤
21	①	22	2	23	21	24	60	25	43
26	84	27	20	28	112	29	144	30	82

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$24\times 2^{-3}=24\times\frac{1}{8}=3$

2. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-6}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{6}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=2$

3. [출제의도] 이항분포 평균 계산하기

$\mathrm{E}(X)=12\times\frac{1}{3}=4$

4. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

$A^C=\{1,2,3,9,10\}$, $B=\{1,3,4,7,8,9\}$

$A^C\cap B=\{1,3,9\}$

따라서 $1+3+9=13$

5. [출제의도] 명제와 조건 이해하기

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면

$P=\{x\,|\,k\le x\le k+3\}$

$Q=\{x\,|\,3\le x\le 10\}$

p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$

$3\le k$, $k+3\le 10$

$3\le k\le 7$

따라서 실수 k의 최댓값은 7

6. [출제의도] 사건의 독립 이해하기

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}$

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to -1-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=0+(-1)=-1$

8. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

$\lim_{x\to 2-}(x^3-ax+2)=\lim_{x\to 2+}(5x-2a)=f(2)$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$f'(2)$가 존재해야하므로

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0-}\frac{(2+h)^3-a(2+h)+2-(10-2a)}{h}$

$=12-a$

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to 0+}\frac{5(2+h)-2a-(10-2a)}{h}=5$

$12-a=5$

따라서 $a=7$

9. [출제의도] 무리함수 이해하기

함수 $y=-\sqrt{x+3}+a$는 닫힌 구간 $[-2,6]$에서 감소한다.

$x=-2$일 때, 최댓값 1을 가지므로

$1=-\sqrt{-2+3}+a$, $a=2$

$x=6$일 때, 최솟값 m을 가지므로

$m=-\sqrt{6+3}+2$, $m=-1$

따라서 $am=-2$

10. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제해결하기

역사 동아리 학생 중 임의로 선택한 1명이 박물관 A를 선택한 학생인 사건을 X, 1학년 학생인 사건을 Y라 하면

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{9}{32}}{\frac{24}{32}}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

11. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f'(x)=3x^2-2x+7$

$f(x)=x^3-x^2+7x+C$

$f(1)=1-1+7+C=0$, $C=-7$

따라서 $f(2)=11$

12. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$a_n=n^3+(1-n)n^2+n=n(n+1)$

$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

13. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기

$a_{n+2}=a_{n+1}-2a_n+5$

$a_3=3-4+5=4$

$a_4=4-6+5=3$

$a_5=3-8+5=0$

$a_6=0-6+5=-1$

따라서 $a_6=-1$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 이해하기

두 점 P, Q가 출발 후 $t=a\ (a>0)$에서 다시 만나므로

$\int_0^a(3t^2+6t-6)dt=\int_0^a(10t-6)dt$

$a^3+3a^2-6a=5a^2-6a$

$a^3-2a^2=a^2(a-2)=0$

따라서 $a=2$

15. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제해결하기

(ⅰ) 6, 6, 2인 경우 순서쌍의 개수 $\frac{3!}{2!}=3$

(ⅱ) 6, 5, 3인 경우 순서쌍의 개수 $3!=6$

(ⅲ) 6, 4, 4인 경우 순서쌍의 개수 $\frac{3!}{2!}=3$

(ⅳ) 5, 5, 4인 경우 순서쌍의 개수 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 $3+6+3+3=15$

(다른 풀이)

$a=6-a'$, $b=6-b'$, $c=6-c'$이라 하자.

$(6-a')+(6-b')+(6-c')=14$

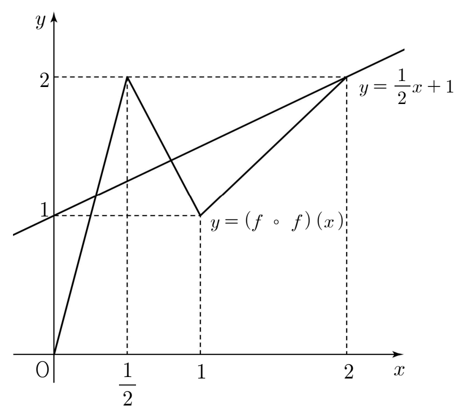
$a'+b'+c'=4$ (단, a',b',c'은 음이 아닌 정수)

따라서 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

16. [출제의도] 합성함수를 이용하여 문제해결하기

$(f\circ f)(x)=\begin{cases}2f(x) & (0\le f(x)<1)\\ -f(x)+3 & (1\le f(x)\le 2)\end{cases}$

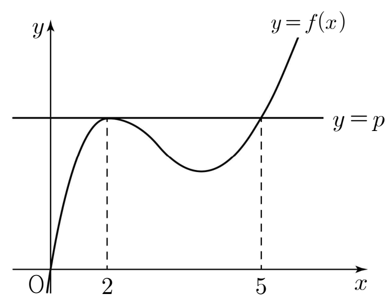
$(f\circ f)(x)=\begin{cases}4x & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right)\\ -2x+3 & \left(\frac{1}{2}\le x<1\right)\\ x & (1\le x\le 2)\end{cases}$



따라서 교점의 개수는 3

17. [출제의도] 함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

조건(가)와 조건(나)를 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)-p=(x-2)^2(x-5)$

$f(0)=0$이므로 $p=20$

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+20=x^3-9x^2+24x$

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3-9x^2+24x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2\right]_0^2=28$

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

공에 번호를 부여하는 모든 경우의 수를 N이라 하면 N은 서로 같은 흰 공 4개와 서로 같은 검은 공 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$N=\boxed{35}$ 이고, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

(i) $X=2$일 때,
번호 2가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개, 번호 2가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 3개를 나열하는 경우의 수는
$1\times\dfrac{5!}{2!\times3!}$ 이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{10}{N}$

(ii) $X=3$일 때,
번호 3이 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 1개, 번호 3이 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 2개를 나열하는 경우의 수는 $2!\times\dfrac{4!}{2!\times2!}$ 이므로
$\mathrm{P}(X=3)=\dfrac{12}{N}$

(iii) $X=4$일 때,
번호 4가 부여된 흰 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 2개, 번호 4가 부여된 흰 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 1개를 나열하는 경우의 수는 $\boxed{9}$ 이므로
$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{\boxed{9}}{N}$

(iv) $X=5$일 때,
확률질량함수의 성질에 의하여
$\mathrm{P}(X=5)=1-\{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}$

따라서 $\mathrm{E}(X)=\sum_{k=2}^{5}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}=\boxed{\dfrac{16}{5}}$

$a=\dfrac{7!}{4!\times3!}=35$, $b=\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=9$

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{10}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$c=2\times\dfrac{10}{35}+3\times\dfrac{12}{35}+4\times\dfrac{9}{35}+5\times\dfrac{4}{35}=\dfrac{16}{5}$

따라서 $a+b+5c=60$

19. [출제의도] 등비급수를 활용하여 추론하기

$S_1=2\times\{(\text{부채꼴 } \mathrm{C_3C_2P_1}\text{ 의 넓이})-(\text{직각삼각형 } \mathrm{C_3C_2A_2}\text{ 의 넓이})\}$

$=2\times\left(\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{3\pi-2\sqrt{3}}{2}$

정삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면 삼각형의 중점연결 정리에 의해

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$ 이므로 그림 R_n 에 새로 색칠된 부분의 넓이를 b_n 이라 하면

$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n$, $b_1=S_1$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $\dfrac{3\pi-2\sqrt{3}}{2}$ 이고 공비가 $\dfrac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k$

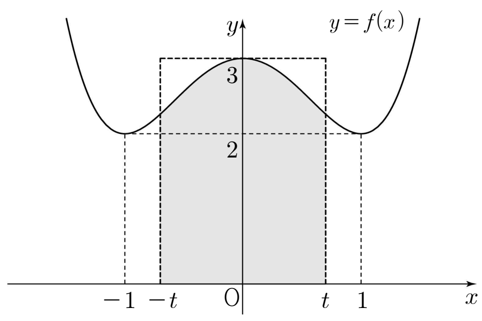
$=\dfrac{\dfrac{3\pi-2\sqrt{3}}{2}}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{6\pi-4\sqrt{3}}{3}$

20. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 참, 거짓 추론하기

ㄱ. $f'(-x)=-f'(x)$ 이고 $f'(1)=0$
$f'(-1)=-f'(1)=0$ (참)

ㄴ. $f'(-1)=f'(1)=0$, $f'(0)=0$
$f'(x)=4x(x-1)(x+1)$
$f(x)=x^4-2x^2+C$
$f(1)=2$, $C=3$
$f(x)=x^4-2x^2+3$
$f(-x)=f(x)$ 이므로
$\int_{-k}^{0}f(x)dx=\int_{0}^{k}f(x)dx$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)=x^4-2x^2+3$ 의 그래프는 그림과 같다.



$x=-t$, $x=t$, x축, $y=f(x)$로 둘러싸인 영역의 넓이 $\int_{-t}^{t}f(x)dx$ 는 $x=-t$, $x=t$, x축, $y=3$으로 둘러싸인 직사각형의 넓이 $6t$보다 작다. (참)

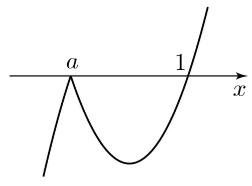
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 함수의 그래프 이해하기

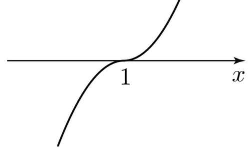
$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x-a) & (x\geq a)\\ -(x-1)(x-a) & (x<a)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

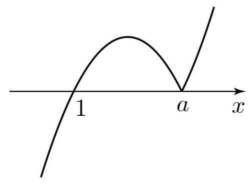
(i) $a<1$일 때



(ii) $a=1$일 때



(iii) $a>1$일 때

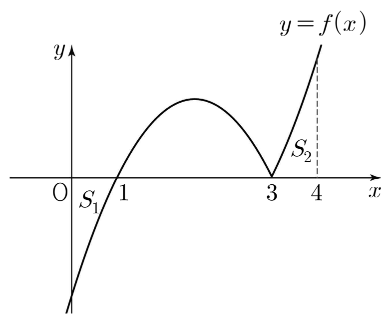


함수 $f(x)$ 의 극댓값이 1이므로 그래프의 개형은 (iii)과 같아야 하고, 극댓값을 갖는 x 의 값은 $\dfrac{a+1}{2}$

$f\left(\dfrac{a+1}{2}\right)=-\left(\dfrac{a+1}{2}-1\right)\left(\dfrac{a+1}{2}-a\right)=1$

$\dfrac{(a-1)^2}{4}=1$, $a>1$이므로 $a=3$

그림과 같이 영역 S_1 의 넓이와 영역 S_2 의 넓이가 같으므로



$\int_{0}^{4}f(x)dx=\int_{1}^{3}\{-(x-1)(x-3)\}dx$

$=\left[-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{1}^{3}=\dfrac{4}{3}$

22. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_6 3+\log_6 12=\log_6 36=2$

23. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=6x^2-3$, $f'(2)=21$

24. [출제의도] 이항정리 이해하기

$(2x-1)^6=\sum_{r=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}(-1)^r$

$6-r=2$, $r=4$

따라서 x^2 의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_4\times2^2=60$

25. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_2=a_1+d=7$ …… ㉠

$S_7-S_5=a_7+a_6=2a_1+11d=50$ …… ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$a_1=3$, $d=4$

$a_{11}=a_1+10d=43$

26. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

서로 다른 4개의 상자 중 빈 상자의 개수가 1인 경우의 수는 4

빈 상자가 아닌 서로 다른 3개의 상자에 넣은 공의 개수를 각각 a, b, c라 하자. 공을 넣는 경우의 수는 방정식 $a+b+c=8$을 만족시키는 자연수 a, b, c의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

따라서 $4\times21=84$

27. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 활용하여 문제해결하기

$g(x)=f(x)-x^2$이라 하자.

$g(1)=f(1)-1=0$, $f(1)=1$

$\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-2$

$g'(x)=f'(x)-2x$, $f'(1)=0$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면

$f(0)=2$, $c=2$

$f(1)=1+a+b+2=1$, $a+b=-2$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

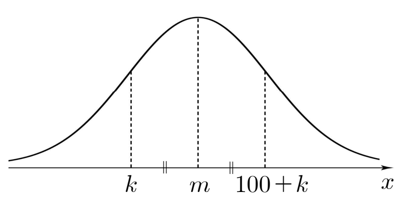
$f'(1)=3+2a+b=0$, $2a+b=-3$

$a=-1$, $b=-1$

따라서 $f'(3)=20$

28. [출제의도] 표준정규분포를 활용하여 문제 해결하기

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\,8^2\right)$을 따른다.
조건 (가)를 만족시키는 정규분포의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



$m-k=(100+k)-m$, $k=m-50$

$\mathrm{P}(X\ge 2k)=\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{m-100}{8}\right)=0.0668$

$0.5-\mathrm{P}\left(Z\ge \dfrac{m-100}{8}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le \dfrac{m-100}{8}\right)=0.4332$

$\dfrac{m-100}{8}=1.5$

따라서 $m=112$

29. [출제의도] 집합의 원소를 활용하여 추론하기

(i) 가장 작은 원소가 2인 경우

$2\times\left({}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5\right)$

$=2\times\left(2^5-{}_5\mathrm{C}_0-{}_5\mathrm{C}_1\right)=52$

(ii) 가장 작은 원소가 2^2인 경우

$2^2\times\left({}_4\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_4\right)$

$=2^2\times\left(2^4-{}_4\mathrm{C}_0-{}_4\mathrm{C}_1\right)=44$

(iii) 가장 작은 원소가 2^3인 경우

$2^3\times\left({}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_3\right)=32$

(iv) 가장 작은 원소가 2^4인 경우

$2^4\times{}_2\mathrm{C}_2=16$

따라서 $52+44+32+16=144$

(다른 풀이)

각 부분집합에서 가장 작은 원소의 합은

$2\times 2^5+2^2\times 2^4+\cdots+2^6\times 1$

$=6\times 2^6=384$

원소의 개수가 1, 2인 부분집합의 가장 작은 원소의 합은

$(2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)$

$+(2\times 5+2^2\times 4+2^3\times 3+2^4\times 2+2^5\times 1)$

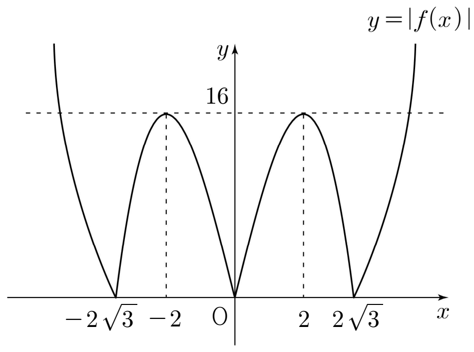
$=\dfrac{2\times(2^6-1)}{2-1}+(10+16+24+32+32)$

$=126+114=240$

따라서 $384-240=144$

30. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 문제 해결하기

함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(t)$가 $t=0$에서 불연속이 되는 경우는 $f(a)=0$ 또는 $f(a)=16$인 경우뿐이다.

(i) $f(a)=0$인 경우

$a=-2\sqrt{3}$, $a=2\sqrt{3}$

① $a=-2\sqrt{3}$인 경우

$x<-2\sqrt{3}$인 범위에서

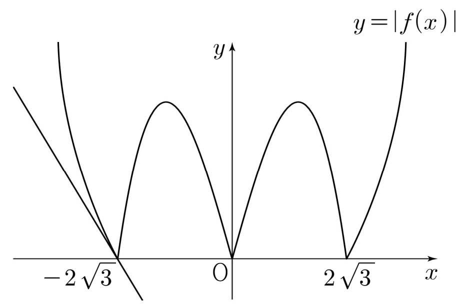
$|f(x)|=-f(x)$이므로

$-f'(-2\sqrt{3})=-24$

따라서 그림과 같이 $t=-24$일 때

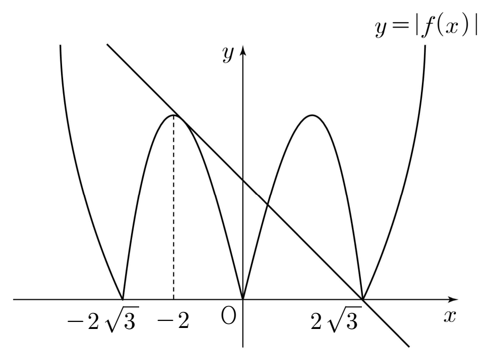
함수 $g(t)$가 불연속이므로 k의 값 중

가장 작은 값은 0이 아니다.



② $a=2\sqrt{3}$인 경우

그림과 같이 점 $(2\sqrt{3},0)$을 지나는 직선이 $-2<x<0$인 범위에서 곡선 $y=|f(x)|$와 접할 때의 기울기 t의 값 $t=k$에 대하여 함수 $g(t)$가 불연속이므로 k의 값 중 가장 작은 값은 0이 아니다.

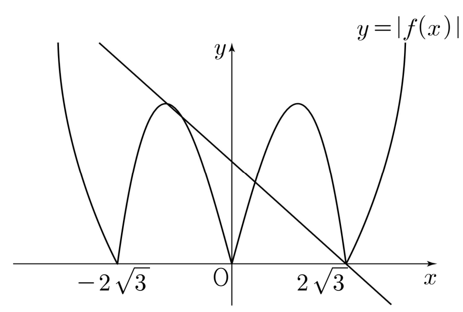


(ii) $f(a)=16$인 경우

$a=-2$, $a=4$

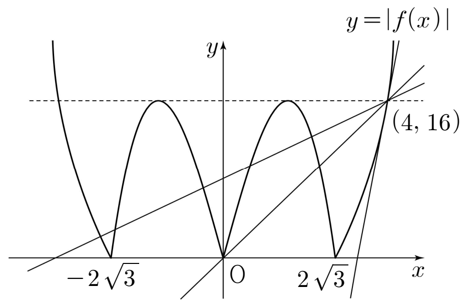
$a=-2$일 때, 그림과 같이

두 점 $(-2,16)$, $(2\sqrt{3},0)$을 지나는 직선의 기울기 t의 값 $t=k$에 대하여 함수 $g(t)$가 불연속이므로 k의 값 중 가장 작은 값은 0이 아니다.



따라서 주어진 조건을 만족하는 a의 값은 4

그러므로 점 $(4,16)$을 지나고, 기울기가 t인 직선과 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



직선 $y=t(x-4)+16$의 x절편이 $4-\dfrac{16}{t}\ (t\ne 0)$

이고, 곡선 $y=x^3-12x$ 위의 점 $(4,\ 16)$에서의 접선의 기울기가 36이므로

$t=1$, 2일 때, $g(t)=6$

$t=3$일 때, $g(t)=4$

$t=4$일 때, $g(t)=3$

$t=5$, 6 , $\cdots$, 35일 때, $g(t)=2$

$t=36$일 때, $g(t)=1$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{36}g(n)=6\times 2+4+3+2\times 31+1=82$

(참고)

$a=4$일 때, 함수 $y=g(t)$의 그래프는 그림과 같다.